PROSEMINAR ALGEBRA WS 2014

Die mit ^{s} gekennzeichnete Aufgabe ist schriftlich auszuarbeiten und nächsten Dienstag im Proseminar abzugeben. Aufgaben mit * sind etwas anspruchsvoller.

49 Ist die Transposition auf dem Matrizenring $\mathrm{M}_n(R)$, R ein kommutativer Ring, ein Ring-Isomorphismus? Oder ein R-Modul-Isomorphismus? Begründe die Antwort und veranschauliche an Beispielen.

50 Sei R kommutativer Ring mit Idealen $I, J \subseteq R$.

(a) Zeige, dass $I : J = \{r \in R : rJ \subset I\}$ ein Ideal in R ist, und dass $I \subseteq I : J$ gilt.

Bemerkung: Die Ideale $I : J$ heissen Ideal-Quotienten.

(b) Sei $R = K[x, y, z]$. Berechne $\langle xz, yz\rangle : \langle z\rangle$, $\langle x, yz\rangle : \langle x, y\rangle$, $\langle x, y\rangle : \langle x\rangle$.

(c)* Finde eine geometrische Interpretation dieser Ideale durch Vergleich der Nullstellenmengen von I, J und $I : J$ in K^3?

51 Bestimme möglichst einfache EZS der folgenden Ideale:

a) $I = \langle x^4 - x, x^4 - 1\rangle \subseteq \mathbb{Q}[x]$.

b) $I = \langle y - x^2, 3x + y, x^2 + y^2 - 1\rangle \subseteq \mathbb{R}[x, y]$.

Hinweis: Betrachte die gemeinsamen Nullstellen der drei Polynome in $\mathbb{R}^2$. Schliesse daraus, dass I gleich einem Ideal $I_A = \{f \in \mathbb{R}[x, y],\ f_{|A} \equiv 0\}$ für eine Teilmenge A von $\mathbb{R}^2$.

c) Es sei $M = K[x, y]/\langle x^2, y^3\rangle$. Finde ein EZS von M als K-VR, als $K[x]$-Modul sowie als $K[x, y]$-Modul.

52^s (a) Beschreibe $M = K[st, s, t^2] \subset K[s, t]$ als Faktorring eines Polynomrings $K[x, y, z]$.

Hinweis: Finde einen surjektiven Ringhomomorphismus $K[x, y, z] \to K[st, s, t^2]$.

(b) Welche algebraischen Stukturen existieren in natürlicher Weise auf $K[s, t]/K[st, s, t^2]$?

(c)* Beschreibe $M = K[s, t]$ als $K[s^3, t^4]$-Modul. Finde insbesondere ein EZS von M.

53 Die 3×3 Matrix A habe die Zeilen $(0, -6, 10)$, $(2, -2, 3)$ und $(-4, 1, -1)$.

(a) Bestimme je zwei EZS des Spalten- und Zeilenraumes von A in $\mathbb{Z}^3$, bzw. deren Bilder in $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3$ unter der kanonischen Projektion $\mathbb{Z}^3 \to (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3$.

(b) Berechne weiters den Kern der von A und A^T induzierten linearen Abbildungen von $\mathbb{Z}^3$ nach $\mathbb{Z}^3$, bzw. von $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3$ nach $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3$.

54* Kann man $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^3$ als $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-Modul bzw. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-Vektorraum auffassen? Wenn ja, wie lautet eine geeignete Skalarmultiplikation?

Hinweis: Stelle sicher, dass die Multiplikation wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängt.